

(٤٠ درجة لكل تمرين)

أولاً: حل التمارين الأربعة الآتية:

١. لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالعلاقة  $u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$  ، حيث:  $+1 > q > -1$

• أثبت أن  $u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  ، ثم استنتج نهاية المتتالية.

٢. جد تابع أصلي للتابع  $f(x) = \frac{x}{e^{2-x^2}}$  و احسب نهاية  $f(x)$  عند  $(+\infty)$  .

٣. لتكن المجموعة  $S = \{0, 1, 4, 5, 2\}$

• كم عدد ثلاثي أرقامه مختلفة يمكن تشكيله من عناصر  $S$  .  
• كم عدد ثلاثي زوجي أرقامه مختلفة يمكن تشكيله من عناصر  $S$  .

٤. أثبت أن:  $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$  و ذلك أيّاً كان  $x$  من  $]-1, +\infty[$

(٦٠ درجة لكل سؤال)

ثانياً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

١. بفرض المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  ، و المتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق  $v_n = u_n - 1$

• أثبت أن  $v_n$  هندسية، وعيّن أساسها، واكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$

• استنتج عبارة  $u_n$  ثم ادرس اطراد المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  .

٢. في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا المستويات:

$$P_1: 2x - y + 3z = 2$$

$$P_2: x + 2y + z = 1$$

$$P_3: 3x - 4y + 5z = 3$$

• أثبت أن كل اثنين منهما متقاطعان.

• أثبت بالاعتماد على طريقة غاوس أنّ المستويات الثلاثة تشترك بمستقيم  $d$  ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

٣.  $A B C D E F G H$  متوازي مستطيلات

فيه  $I$  منتصف  $A B$  و

$$B C = G C = 1 \text{ و } A B = 2$$

و بفرض  $(A, \overrightarrow{A I}, \overrightarrow{A D}, \overrightarrow{A E})$  معلم في الفراغ،

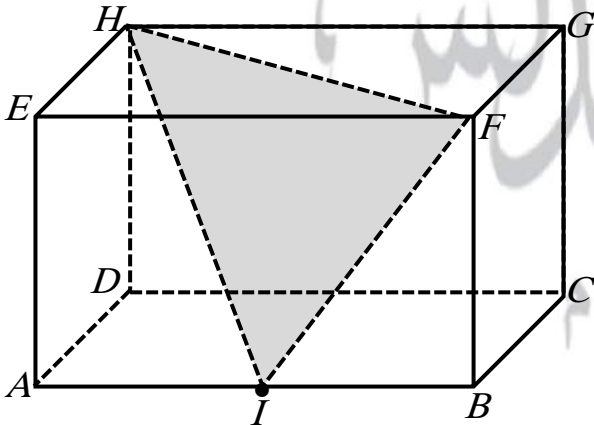
• جد إحداثيات النقاط  $H, G, F, I$

و اكتب معادلة للمستوي  $(I F H)$

• احسب بعد  $G$  عن المستوي  $(I F H)$  ،

و اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $I H$  ،

ثم عيّن إحداثيات  $G'$  المسقط القائم للنقطة  $G$  على المستقيم  $I H$



٤. لتكن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية معرفة وفق:  $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$

- أثبت أن  $n \leq 2^n$  أيما كان العدد الطبيعي  $n$ . (بطريقة التدرج)
- بالاستفادة من المتراجحة السابقة برهن أن:

$$u_n \leq 2 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right)$$

و استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية.

(١٠٠ درجة لكل مسألة)

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

يحتوي صندوق ثلاث كرات حمراء و كرة واحدة سوداء و هي متماثلة، ن سحب من الصندوق كرتين بالتتالي دون إعادة، و المطلوب:

١. ما احتمال أن تكون الكرتان فيهما واحدة على الأكثر سوداء.
  ٢. إذا علم أن واحدة على الأقل حمراء، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوان.
  ٣. بفرض متحولاً عشوائياً  $X$  يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة:
- اكتب جدول قانون احتمال المتحول العشوائي ثم احسب:  $E(X)$ ،  $V(X)$

المسألة الثانية: بفرض  $C$  الخط البياني لتابع  $f$  معرف على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = x^3 \cdot e^x$

١. ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها.
٢. استنتج وجود مستقيم مقارب للخط  $C$ ، ارسمه ثم ارسم  $C$ .
٣. استنتج رسم  $C'$  الخط البياني للتابع  $g(x) = \frac{x^3}{e^x}$ .
٤. بفرض  $p(x)$  كثير حدود يجعل التابع  $F(x) = p(x) \cdot e^x$  تابعاً أصلياً للتابع  $f(x)$ . أثبت أن  $p'(x) + p(x) = x^3$ ، ثم استنتج درجة كثير الحدود  $p(x)$  و أوجدته.
٥. احسب مساحة السطح المغلق المحدود بين  $C$  و المحور  $x$  و المستقيم  $x = -3$

❖ انتهت الأسئلة ❖