

أولاً: حل التمارين الأربعة الآتية: (٤٠ درجة لكل تمرين)

١. لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ ، حيث: $+1 > q > -1$

• أثبت أن $u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية.

٢. جد تابع أصلي للتابع $f(x) = \frac{x}{e^{2-x^2}}$ و احسب نهاية $f(x)$ عند $(+\infty)$.

٣. لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 4, 5, 2\}$

• كم عدد ثلاثي أرقامه مختلفة يمكن تشكيله من عناصر S .
• كم عدد ثلاثي زوجي أرقامه مختلفة يمكن تشكيله من عناصر S .

٤. أثبت أن: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$ و ذلك أيّاً كان x من $]-1, +\infty[$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (٦٠ درجة لكل سؤال)

١. بفرض المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2$ ، و المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n - 1$

• أثبت أن v_n هندسية، و عيّن أساسها، و اكتب عبارة v_n بدلالة n

• استنتج عبارة u_n ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$.

٢. في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا المستويات:

$$P_1: 2x - y + 3z = 2$$

$$P_2: x + 2y + z = 1$$

$$P_3: 3x - 4y + 5z = 3$$

• أثبت أن كل اثنين منهما متقاطعان.

• أثبت بالاعتماد على طريقة غاوس أنّ المستويات الثلاثة تشترك بمستقيم d ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

٣. $A B C D E F G H$ متوازي مستطيلات

فيه I منتصف $A B$ و

$$B C = G C = 1 \text{ و } A B = 2$$

و بفرض $(A, \overrightarrow{A I}, \overrightarrow{A D}, \overrightarrow{A E})$ معلم في الفراغ،

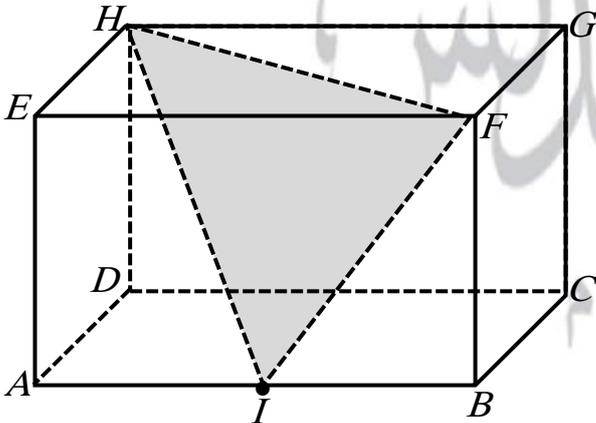
• جد إحداثيات النقاط H, G, F, I

و اكتب معادلة للمستوي $(I F H)$

• احسب بعد G عن المستوي $(I F H)$ ،

و اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $I H$ ،

ثم عيّن إحداثيات G' المسقط القائم للنقطة G على المستقيم $I H$



٤. لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة وفق: $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$

- أثبت أن $n \leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي n . (بطريقة التدرج)
- بالاستفادة من المتراجحة السابقة برهن أن:

$$u_n \leq 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

و استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية.

(١٠٠ درجة لكل مسألة)

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

يحتوي صندوق ثلاث كرات حمراء و كرة واحدة سوداء و هي متماثلة، ن سحب من الصندوق كرتين بالتتالي دون إعادة، و المطلوب:

١. ما احتمال أن تكون الكرتان فيهما واحدة على الأكثر سوداء.
 ٢. إذا علم أن واحدة على الأقل حمراء، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوان.
 ٣. بفرض متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة:
- اكتب جدول قانون احتمال المتحول العشوائي ثم احسب: $E(X)$ ، $V(X)$

المسألة الثانية: بفرض C الخط البياني لتابع f معرف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = x^3 \cdot e^x$

١. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
٢. استنتج وجود مستقيم مقارب للخط C ، ارسمه ثم ارسم C .
٣. استنتج رسم C' الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{x^3}{e^x}$.
٤. بفرض $p(x)$ كثير حدود يجعل التابع $F(x) = p(x) \cdot e^x$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$. أثبت أن $p'(x) + p(x) = x^3$ ، ثم استنتج درجة كثير الحدود $p(x)$ و أوجدته.
٥. احسب مساحة السطح المغلق المحدود بين C و المحور x و المستقيم $x = -3$

❖ انتهت الأسئلة ❖